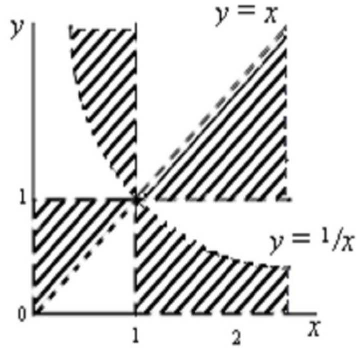
11 класс.

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\log_x y < \log_y x$.

Указание. ОДЗ: $x > 0,\ y > 0, x \neq 1,\ y \neq 1$. Пусть $t = \log_x y$. Тогда имеем неравенство $t < \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t+1)}{t} < 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ 0 < t < 1 \end{array}\right.$. В случае, когда t<–1, получаем две системы: $\begin{cases} x > 1 \\ y < \frac{1}{x} \end{cases}$, либо $\begin{cases} x < 1 \\ y > \frac{1}{x} \end{cases}$. В случае, когда 0<$t$<1, также имеем две системы: $\begin{cases} x > 1 \\ 1 < y < x \end{cases}$, либо $\begin{cases} x < 1 \\ x < y < 1 \end{cases}$. Совокупность указанных решений четырех систем изображена на рисунке.



2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^3 - a^3| = x - a$ имеет три различных корня.

Ответ. $\frac{-2}{\sqrt{3}} < a < \frac{-1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** См. задачу 2 для 10 класса

3. Найдите множество значений и наименьший период функции $y = cos^2\ 3x + sin\ 6x$.

Ответ. Множество значений $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, наименьший период π/3. **Указание.** Преобразуем функцию y к виду $y = \frac{1+\cos 6x}{2} + \sin 6x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(6x + \alpha)$, где α – вспомогательный угол ($\sin\alpha = \sqrt{1/5}, \cos\alpha = \sqrt{4/5}$). Таким образом, график данной функции получается из графика $y = \sin 6x$ растяжением по оси y в $\frac{\sqrt{5}}{2}$ раз, затем сдвигом по оси x влево на величину $\frac{\alpha}{6}$ и, наконец, сдвигом вверх по оси у на $\frac{1}{2}$. Поэтому ответ на вопрос задачи следует из того, что множество значений функции $y = \sin 6x$ есть [-1;1], а наименьший период $\frac{2\pi}{6}$; и, значит, множество значений данной функции есть $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, а период – такой же, как у функции $y = \sin 6x$, т.е. $\frac{\pi}{3}$.

4. Дан треугольнике $ABC,$ у которого сторона BC вдвое больше стороны AB , и в нём проведена биссектриса BM. **а**) Найдите отношение R_1/R_2 , где R_1, R_2 — радиусы описанных окружностей треугольников ABM и CBM соответственно. **б**) Докажите, что $3/4 < r_1/r_2 < 1$, где r_1, r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников ABM и CBM соответственно.

Ответ. а) . $R_1/R_2 = ½$. **Указание. а**) Пусть $\angle BMA = \alpha$, тогда $\angle BMC = \pi - \alpha$. Тогда в треугольниках *ABM* и *CBM* имеем соотношения $AB = 2R_1 \sin\alpha$, $BC = 2R_2 \sin(\pi - \alpha) = 2R_2 \sin\alpha$. Отсюда $R_1/R_2 = AB/BC = ½$. (Заметим, что в данном решении не используется тот факт, что *BM* — биссектриса).

б) Площадь треугольника *CBM* вдвое больше площади треугольника *ABM (*это следует, например, из формулы площади по двум сторонам при вершине *B* и одному и тому же углу, равному половине угла *B*). Имеем $2S_1 = P_1 r_1 = (AB + AM + BM)\cdot r_1$ и $2S_2 = P_2 r_2 = (2AB + 2AM + BM)\cdot r_2$ (здесь P_1, P_2 – периметры треугольников *ABM* и *CBM*, и при подсчете периметра P_2 мы воспользовались равенством *CM*=2*AM*, которое следует из свойства биссектрисы: *CM/AM*=*CB/AB*). Обозначим *d*=*BM, t*=*AB*+*AM*. Очевидно (из неравенства треугольника), *d*<*t*. Таким образом, в этих обозначениях имеем $2(t+d)r_1 = (2t+d)r_2$. Отсюда следует, во первых, что $r_1 < r_2$. Во-вторых, искомое неравенство $3/4 < r_1/r_2$ принимает вид $8t+4d > 6t+6d$, т.е $d<t$.

5. **а**) Докажите, что равносторонний треугольник можно разбить на 2011 равносторонних треугольников. **б**) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении длины сторон разных треугольников принимали лишь два различных значения?

Ответ: б) да, можно**. Указание**. См. задачу 5 для 10 класса

11 класс

11.1. Решите уравнение $\arccos\frac{x+1}{2}=2\,\mathrm{arctg}\,x$.

Ответ: $x=\sqrt{2}-1$. **Указание.** Возьмем косинус от обеих частей и воспользуемся формулой $\cos 2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$. В результате получим $\frac{x+1}{2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Корни этого уравнения: $x_1=-1;\ x_{2,3}=\pm\sqrt{2}-1$. Выясняя знаки чисел $\arccos\frac{x+1}{2}$ и *arctg x* для $x=-1$ и $x=-\sqrt{2}-1$, получим, что эти корни -- посторонние. Корень же $x=\sqrt{2}-1$ истинный, в чем можно убедиться, показав, что $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\mathrm{arctg}(\sqrt{2}-1)$ лежат в промежутке $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, где косинус изменяется монотонно.

11.2. Какому наименьшему положительному числу может равняться старший коэффициент квадратного трехчлена $P(x)$, принимающего целочисленные значения при всех целых x?

Ответ: $\frac{1}{2}$. **Указание**. См. задачу 10.2

11.3. Найдите множество значений параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-6ax+\left(2-2a+9a^2\right)=0$ имеет два корня, большие числа 3.

Ответ: $a>\frac{11}{9}$. **Указание**. Условие задачи равносильно неравенству $3a-\sqrt{9a^2-(2-2a+9a^2)}>3$, причём подкоренное выражение должно быть строго положительно, т.е. $a>1$ и $\sqrt{2(a-1)}<3(a-1)\Leftrightarrow\begin{cases}a>1\\2(a-1)<9(a-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow a-1>\frac{2}{9}$.

11.4. Докажите, что из любых десяти целых чисел можно выбрать два числа, разность кубов которых делится на 27.
Указание. См. задачу 10.5

11.5. Дан выпуклый n-угольник. Докажите, что существует n-угольник, подобный данному, у которого длины всех сторон являются иррациональными числами.
Указание. Возьмем $(n+1)$ иррациональных чисел, равных $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\ldots,\sqrt{p_n},\sqrt{p_{n+1}}$, где p_n – n-ое простое число (это возможно, т.к. простых чисел бесконечно много). Рассмотрим $(n+1)$ n-угольников, подобных исходному n-угольнику $A_1A_2\ldots A_n$ с коэффициентами подобия $\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_{n+1}}$. Если предположить, что каждый из полученных n-угольников содержит хотя бы одну сторону рациональной длины, то среди $n+1$ таких «рациональных» сторон найдется хотя бы одна пара, соответствующая некоторой стороне A_iA_{i+1} исходного n-угольника. Тогда $\sqrt{p_k}\cdot|A_iA_{i+1}|$ и $\sqrt{p_m}\cdot|A_iA_{i+1}|$ – рациональные числа, где k и m – номера n-угольников, у которых обнаружена указанная пара сторон. Значит, отношение $\sqrt{\frac{p_k}{p_m}}$ также будет рациональным числом, что, очевидно, приводит к противоречию. (*Замечание*: вместо чисел $\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{p_{n+1}}$ можно взять, например, числа $2^{1/2},2^{1/3},\ldots,2^{1/(n+2)}$, отношения которых также иррациональны.)